

Математический анализ

Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 3.2

Аннотация

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Порядок роста функции.

1 Производная в экстремальных точках

*Теорема (теорема Ферма)**

Если функция определена в некоторой окрестности точки c , принимает в этой точке наибольшее или наименьшее значение и имеет в ней конечную или определенного знака бесконечную производную, то эта производная равна нулю.

Доказательство

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(c)$ точки c и принимает в этой точке наибольшее значение. Тогда $\forall x \in U(c) f(x) \leq f(c)$. Соответственно,

$$\text{если } x < c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{если } x > c, \text{ то } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad (2)$$

Перейдя к пределу в данных неравенствах при $x \rightarrow c$, получим

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow f'(c) \geq 0 \\ (2) &\Rightarrow f'(c) \leq 0 \end{aligned} \Rightarrow f'(c) = 0. \quad \blacksquare$$

2 Теоремы о средних значениях

*Теорема (теорема Ролля)**

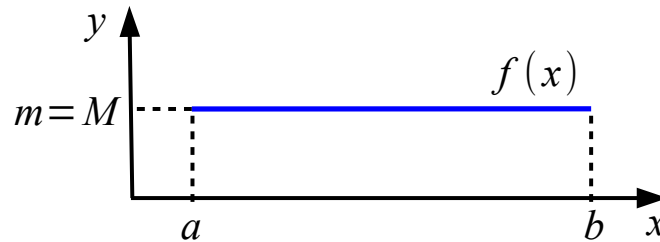
Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

- 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$,
 - 2) имеет на интервале (a, b) конечную или определенного знака бесконечную производную,
 - 3) $f(a) = f(b)$.
- Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство

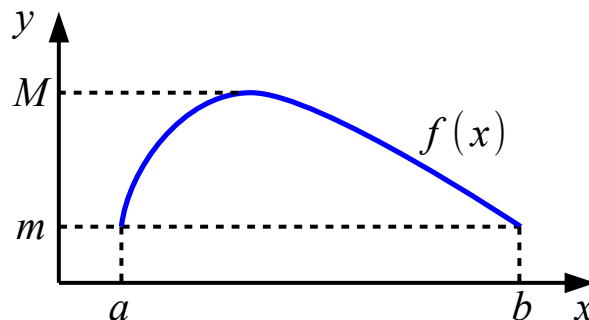
Поскольку $f(x) \in C[a, b]$, то она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего M и наименьшего m значений по теореме Вейерштрасса для функции, непрерывной на отрезке. Возможны случаи:

- 1) $m = M$



Тогда $f(x) = \text{const} \Rightarrow \forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$

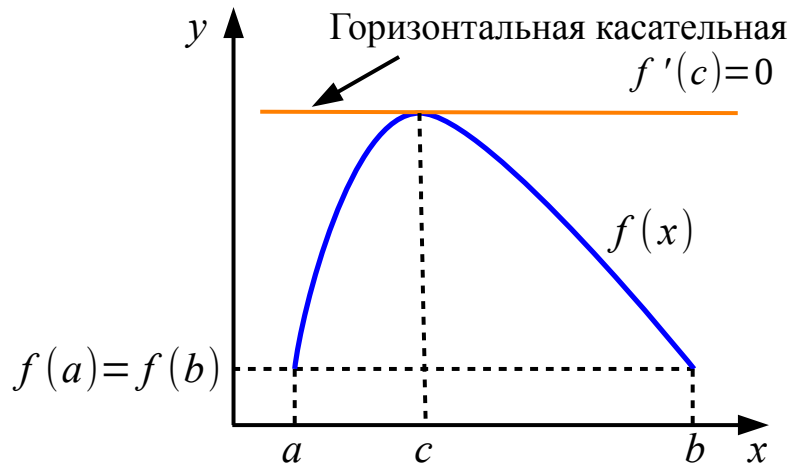
- 2) $m \neq M$



Так как $f(a) = f(b)$, то m или M достигаются на интервале (a, b) . Пусть M достигается на (a, b) , т.е. $M = f(c), c \in (a, b)$. Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$. ■

Геометрическая интерпретация теоремы

Если функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, то на интервале (a, b) существует точка, в которой эта функция имеет горизонтальную касательную.

*Теорема (теорема Лагранжа, теорема о конечных приращениях)**

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке интервала (a, b) имеет конечную или определенного знака бесконечную производную, то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Доказательство

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0.$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$

Теорема (теорема Коши)

Пусть функции f и g

- 1) непрерывны на отрезке $[a, b]$,
- 2) имеют производные в каждой точке интервала (a, b) ,
- 3) $g' \neq 0$ во всех точках интервала (a, b) .

Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3 Правило Лопиталя

Правило Лопиталя - это способ нахождения пределов функций через их производные.

Рассмотрим частный случай раскрытия неопределенности

$$\left(\frac{0}{0} \right)$$

*Теорема (правило Лопиталя)**

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

- 1) непрерывны и дифференцируемы на интервале (a, b) ,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$,
- 3) $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$,
- 4) $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство

Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, положив $f(a) = g(a) = 0$. В этом случае функции $f(x)$ и $g(x)$ становятся непрерывными в точке a .

$\Rightarrow f(x)$ и $g(x)$ начинают удовлетворять всем условиям теоремы Коши на любом отрезке $[a, x]$, где $a < x < b$.

$$\Rightarrow \exists c(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (1)$$

Так как $a < c < x$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} c = a$.

Тогда по теореме о замене переменной в пределе имеем:

$$K = \lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

$$\Rightarrow \text{по равенству (1)} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = K.$$

$$\text{По условию 4 теоремы} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \blacksquare$$

Общий случай:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

где a - это конечное число или одна из бесконечностей.

4 Порядок роста функций

Определение

Говорят, что бесконечно большая при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ имеет **более высокий порядок роста**, чем бесконечно большая при

$x \rightarrow a$ функция $g(x)$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Примеры:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^n)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x)'}{(x^n)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln a}{nx^{n-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x \ln a)'}{(nx^{n-1})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \ln^n a}{n!} = +\infty, a > 1 \end{aligned}$$

Показательная функция растет быстрее степенной, а степенная функция растет быстрее логарифмической.

