

Математический анализ

Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Текст 3.2

Аннотация

Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена. Вычисление пределов по формуле Тейлора.

1 Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{IV}(x) = \sin x$$

$$f^V(x) = \cos x$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(0) = 0$$

$$f^V(0) = 1$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n, \\ (-1)^n, & m = 2n + 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned}
\sin x &= 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 + \\
&+ \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + \dots + \frac{1}{(2n)!} \cdot 0 \cdot x^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} + \\
&+ \frac{1}{(2n+2)!} \cdot 0 \cdot x^{2n+2} + o(x^{2n+2}) = \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Примеры:

$$\sin x = x + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), x \rightarrow 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), x \rightarrow 0.$$

$$2) y = \cos x$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f^{IV}(x) = \cos x$$

$$f^V(x) = -\sin x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(0) = 1$$

$$f^V(0) = 0$$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n + 1, \\ (-1)^n, & m = 2n, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Примеры:

$$\cos x = 1 + o(x), x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), x \rightarrow 0.$$

$$3) f(x) = e^x$$

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = e^x$$

$$f^{(m)}(0) = 1$$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), x \rightarrow 0.$$

$$4) f(x) = (1+x)^\alpha$$

$$f(0) = 1$$

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m}$$

$$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\
&+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n), x \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Примеры:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{0.5} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

$$5) f(x) = \ln(1+x)$$

$$f(0) = 0$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{(1+x)^m}$$

$$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1} (m-1)!$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), x \rightarrow 0.$$

2 Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Для вычисления пределов вида

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

с неопределенностью

$$\left(\frac{0}{0} \right)$$

можно разложить функции $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора в точке c , ограничившись лишь несколькими первыми ненулевыми членами. В результате получаем:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{a(x-c)^n + o((x-c)^n)}{b(x-c)^m + o((x-c)^m)}.$$

Далее числитель и знаменатель дроби делим на $(x-c)$ в наименьшей из n и m степени и используем формулу

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{o((x-c)^\alpha)}{(x-c)^\beta} = 0, \text{ если } \alpha \geq \beta.$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = ?$$

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0,$$

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), x \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - o(x^3) - 2x}{x - x + \frac{x^3}{3!} - o(x^4)} = \\
& = \left| \begin{array}{l} o(x^n) - o(x^n) = o(x^n), \\ -o(x^n) = o(x^n). \end{array} \right| = \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{o(x^4)}{x^3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{1}{6} + 0} = 2.
\end{aligned}$$